第27講　軌跡・領域の求め方

27　次の各問いに答えよ．

(1)　次の式で表される点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ について，P の描く曲線を求め，それを図示せよ．ただし，$0<\theta<\pi$ とする．

$$\begin{cases} x\sin\theta+y\sin2\theta=\sin\theta \\ x\cos\theta+y\cos2\theta=-\cos\theta \end{cases}$$

(2)　実数 t が $0\leqq t\leqq 2$ の範囲で動くとき，直線 $y=3(t^2-1)x-2t^3$ の通過する領域を求め，それを図示せよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第27講　軌跡・領域の求め方

27　実数 a が $0<a<1$ の範囲を動くとき，曲線 $y=x^3-3a^2x+a^2$ の極大点と極小点の間にある部分（ただし，極大点，極小点は含まない）が通る範囲を図示せよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 27 講　軌跡・領域の求め方

> **27**　次の各問いに答えよ．
>
> (1)　次の式で表される点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ について，P の描く曲線を求め，それを図示せよ．ただし，$0<\theta<\pi$ とする．
>
> $$\begin{cases} x\sin\theta+y\sin 2\theta=\sin\theta \\ x\cos\theta+y\cos 2\theta=-\cos\theta \end{cases}$$
>
> (2)　実数 t が $0\leqq t\leqq 2$ の範囲で動くとき，直線 $y=3(t^2-1)x-2t^3$ の通過する領域を求め，それを図示せよ．

【答】 (1) $x=1-y^2\quad(-2<y<2)$

(2)
$$\begin{cases} 9x-16\leqq y\leqq -3x & (x\leqq 0) \\ 9x-16\leqq y\leqq x^3-3x & \left(0<x\leqq \dfrac{4}{3}\right) \\ -3x\leqq y\leqq x^3-3x & \left(\dfrac{4}{3}<x<2\right) \\ -3x\leqq y\leqq 9x-16 & (x\geqq 2) \end{cases}$$

【解答】

(1)　$0<\theta<\pi$ より $\sin\theta\neq 0$　このとき $x\sin\theta+y\sin 2\theta=\sin\theta$ より

$$x\sin\theta+y\cdot 2\sin\theta\cos\theta=\sin\theta\qquad \therefore\quad x+2y\cos\theta=1$$

ここで $y\neq 0$ のとき $\cos\theta=\dfrac{1-x}{2y}$ となり，これを第 2 式を変形した式

$$x\cos\theta+y(2\cos^2\theta-1)=-\cos\theta$$

に代入すると

$$x\cdot\frac{1-x}{2y}+y\left\{2\cdot\frac{(1-x)^2}{4y^2}-1\right\}=\frac{-1-x}{2y}\qquad \therefore\quad x=1-y^2\quad\cdots\cdots①$$

次に $0<\theta<\pi$ より $-1<\cos\theta<1$ となるので

$$-1<\frac{1-x}{2y}<1\qquad \therefore\quad (x-2y-1)(x+2y-1)<0$$

となるが，これに①を代入し整理すると

$$y^2(y-2)(y+2)<0\qquad \therefore\quad -2<y<0,\ 0<y<2$$

となる．

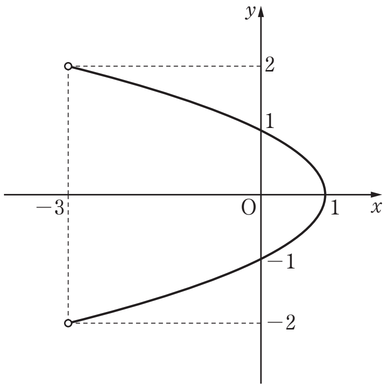
また $y=0$ のとき $x=1$ となるが，このときの第 2 式より $\theta=\dfrac{\pi}{2}$ となるので

$(x,\ y)=(1,\ 0)$ は 2 つの式を満たす．

よって求める曲線は

$$\boldsymbol{x=1-y^2\quad(-2<y<2)}$$

及びそれを表す図形は



(2)　$y=3(t^2-1)x-2t^3$ を t について整理すると $2t^3-3xt^2+3x+y=0$ となるので，
$f(t)=2t^3-3xt^2+3x+y$ とおくとき，$f(t)=0$ が $0\leqq t\leqq 2$ の範囲に実数解を少なくとも1つもつような条件を考えればよい．
$f'(t)=6t^2-6xt=6t(t-x)$ より

(Ⅰ)　$x\leqq 0$ のとき，$0\leqq t\leqq 2$ の範囲で $f(t)$ は増加であるので求める条件は
$f(0)\leqq 0$ かつ $f(2)\geqq 0$
これを整理すると $9x-16\leqq y\leqq -3x$

(Ⅱ)　$0<x\leqq \dfrac{4}{3}$ のとき，$f(t)$ の増減は

t	0	…	x	…	2
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$		↘		↗	

となるが，$f(0)-f(2)=12x-16\leqq 0$ より $0\leqq t\leqq 2$ の範囲で $f(x)\leqq f(t)\leqq f(2)$ となるので，求める条件は
$f(x)\leqq 0$ かつ $f(2)\geqq 0$
これを整理すると $9x-16\leqq y\leqq x^3-3x$

(Ⅲ)　$\dfrac{4}{3}<x<2$ のとき，$f(t)$ の増減は(Ⅱ)と同様となり $f(0)-f(2)=12x-16>0$ より
$0\leqq t\leqq 2$ の範囲で $f(x)\leqq f(t)\leqq f(0)$ となるので，求める条件は
$f(x)\leqq 0$ かつ $f(0)\geqq 0$
これを整理すると $-3x\leqq y\leqq x^3-3x$

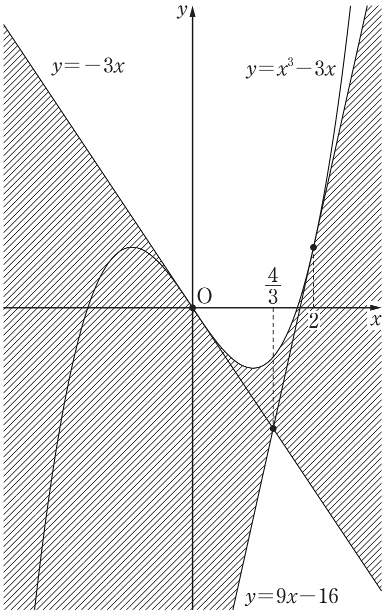
(Ⅳ)　$x\geqq 2$ のとき，$0\leqq t\leqq 2$ の範囲で $f(t)$ は減少であるので求める条件は
$f(0)\geqq 0$ かつ $f(2)\leqq 0$
これを整理すると $-3x\leqq y\leqq 9x-16$

以上より，通過領域は下図境界を含む斜線部分．

ⓒRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

$$\begin{cases} 9x-16 \leqq y \leqq -3x & (x \leqq 0) \\ 9x-16 \leqq y \leqq x^3-3x & \left(0 < x \leqq \dfrac{4}{3}\right) \\ -3x \leqq y \leqq x^3-3x & \left(\dfrac{4}{3} < x < 2\right) \\ -3x \leqq y \leqq 9x-16 & (x \geqq 2) \end{cases}$$



ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第27講　軌跡・領域の求め方

> 27　実数 a が $0<a<1$ の範囲を動くとき，曲線 $y=x^3-3a^2x+a^2$ の極大点と極小点の間にある部分（ただし，極大点，極小点は含まない）が通る範囲を図示せよ．

【答】 略

【解答】

$y'=3x^2-3a^2=3(x-a)(x+a)$ より，$a>0$ であるので y の増減は

x	$\cdots$	$-a$	$\cdots$	a	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗		↘		↗

となり，$x=-a$ のとき極大，$x=a$ のとき極小となる．よって通過する点を $(X,\ Y)$ とおくと，求める領域は

$$\begin{cases} Y=X^3-3a^2X+a^2 & \cdots\cdots① \\ -a<X<a & \cdots\cdots② \\ 0<a<1 & \cdots\cdots③ \end{cases}$$

を同時に満たす実数 a が存在するような点 $(X,\ Y)$ の集合である．①より

$$(1-3X)a^2=Y-X^3$$

(I)　$1-3X\neq 0$ すなわち $X\neq\dfrac{1}{3}$ のとき①より

$$a^2=\frac{Y-X^3}{1-3X}$$

となる．このとき

②より　$X^2<a^2$

$$X^2<\frac{Y-X^3}{1-3X}$$

$$\begin{cases} 1-3X>0 \quad かつ \quad X^2(1-3X)<Y-X^3 \\ 1-3X<0 \quad かつ \quad X^2(1-3X)>Y-X^3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} Y>-2X^3+X^2 \quad かつ \quad X<\dfrac{1}{3} \\ Y<-2X^3+X^2 \quad かつ \quad X>\dfrac{1}{3} \end{cases}$$

③より　$0<a^2<1$

$$0<\frac{Y-X^3}{1-3X}<1$$

$$\begin{cases} 1-3X>0 \quad かつ \quad 0<Y-X^3<1-3X \\ 1-3X<0 \quad かつ \quad 0>Y-X^3>1-3X \end{cases}$$

$$\begin{cases} X^3<Y<X^3-3X+1 \quad かつ \quad X<\dfrac{1}{3} \\ X^3-3X+1<Y<X^3 \quad かつ \quad X>\dfrac{1}{3} \end{cases}$$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

よって

$$\begin{cases} -2X^3+X^2<Y<X^3-3X+1 & \left(X<\dfrac{1}{3}\right) \\ X^3-3X+1<Y<-2X^3+X^2 & \left(X>\dfrac{1}{3}\right) \end{cases}$$

(Ⅱ)　$1-3X=0$ すなわち $X=\dfrac{1}{3}$ のとき

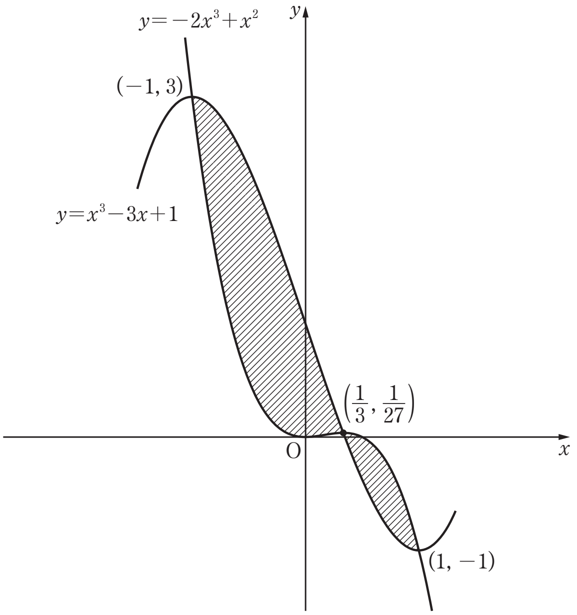
$$①より\quad Y=\frac{1}{27}$$

$$②より\quad -a<\frac{1}{3}<a$$

これと ③を同時に満たす a は存在するので

$$(X,\ Y)=\left(\frac{1}{3},\ \frac{1}{27}\right)$$

以上より求める領域は点 $\left(\dfrac{1}{3},\ \dfrac{1}{27}\right)$ 以外の境界を含まない図の斜線部分.



ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。